

מתמטיקה בדידה

פרק 13 - זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון

תוכן העניינים

- 1.....
1. הבינום של ניוטון.....

הבינום של ניוטון

שאלות

1) הוכחו אלגברית וקומבינטורית את זהות $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

2) הוכחו לכל $n \geq 0$ את זהות $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k} = 6^n$

3) הוכחו את השוויון

$$2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k}3^{n-k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}3^0$$

4) הוכחו שלכל n טבוי מתקיים $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$

5) הוכחו בדרכם אלגברית וקומבינטורית את זהות $\binom{m+n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$

6) הוכחו כי $\binom{2n}{n}$ זוגי לכל $n \in \mathbb{N}$.

7) הוכחו כי $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{3} \cdot 3^n$

8) הוכחו כי $\sum_{k=0}^n \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$

9) הוכחו את השוויון $\sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j} = \binom{3n}{n}$

10) הוכחו בדרכם אלגברית וקומבינטורית את זהות $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$

11) הוכחו שלכל $0 \leq k \leq n$ ולכל $n \geq 0$ מתקאים

$$\cdot \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$$

12) הוכחו אלגברית וקומבינטורית את זהות

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1 = \frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}}{n!}$$

13) הוכחו את זהות

$$\cdot \sum_{k=1}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2}$$

14) הוכחו את השוויון

$$\cdot \sum_{n=0}^N \binom{k-1+n}{n} = \binom{k+N}{N}$$

15) הוכחו כי אם $n > 0$ זוגי, אז

$$2^n > \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{7})^{80}$ שלמים?

17) הוכחו כי לכל n טבעי מתקיים

$$n^n - (n-1)^n = \sum \binom{n}{i} (n-1)^{n-i}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il